

Zur Beobachtung radialsymmetrischer Radioquellen mit dem Michelson-Interferometer I

Von G. ELWERT und H. SIEDENTOPF

Aus dem Astronomischen Institut der Universität Tübingen
(Z. Naturforsch. 11 a, 769—775 [1956]; eingegangen am 4. August 1956)

Zu einer exakten Bestimmung der Intensitätsverteilung radialsymmetrischer kosmischer Radioquellen mit dem MICHELSON-Interferometer wäre es notwendig, den Antennenabstand beliebig groß zu machen. Es wird untersucht, wie die wahre Intensitätsverteilung bei Modellen mit Bereichen konstanter Strahlungstemperatur durch endlichen Maximalabstand verfälscht wird. Dabei werden scheibenförmige und ringförmige Quellen sowie eine Überlagerung von Scheibe und Ring betrachtet.

Bei der Bestimmung des Durchmessers von Radioquellen und ihrer Intensitätsverteilung hat man wiederholt von Interferometern vom Typ des MICELSONSchen Fixsterninterferometers Gebrauch gemacht^{1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Die folgende Untersuchung gibt einen Beitrag zu der Frage, welche Eigenschaften die Interferometeranordnung haben muß, um Durchmesser und Intensitätsverteilung innerhalb der Quelle mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu bestimmen. Wir beschränken uns dabei auf die Betrachtung von radialsymmetrischen Quellen; die Ergebnisse gelten aber in ähnlicher Form auch für elliptische Verteilungen.

I. Problemstellung

Zwei Antennen mit dem Richtdiagramm $F(\Theta)$, die sich im Abstand D gleich n Wellenlängen von einander befinden, liefern für eine punktförmige Quelle das Interferenzdiagramm

$$J(\Theta) = F(\Theta) [1 \pm \cos(2\pi n \sin \Theta)] ; \quad (1)$$

Θ ist der Winkel zwischen der Richtung zur Quelle und der Symmetrieebene der Anordnung senkrecht zur Verbindungsgeraden der Antennen. Das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die beiden Antennen gleichphasig oder gegenphasig an den Empfänger angeschlossen sind. Die bei dem RYLE-schen Phasenumschaltverfahren am Empfängerausgang resultierende Amplitude hat dann den Wert

$$E(\Theta) = 2 K P F(\Theta) \cos(2\pi n \sin \Theta) , \quad (2)$$

¹ H. M. STANIER, Nature, Lond. **165**, 354 [1950].

² K. E. MACHIN, Nature, Lond. **167**, 889 [1951].

³ M. RYLE, Volta Convention Proc. Acad. Naz. dei Lincei **1952**, 276.

wobei P die Intensität der punktförmigen Quelle und K eine von der Empfangsanordnung abhängige Konstante ist.

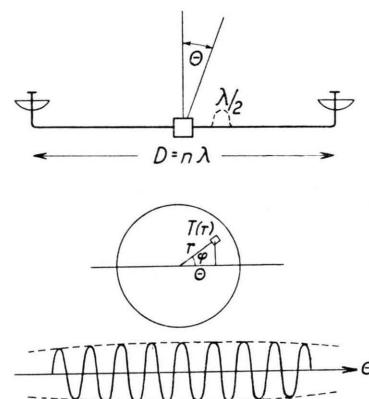


Abb. 1. MICHELSON-Interferometer mit RYLEschem Umwegkabel. Radialsymmetrische Radioquelle und Amplitude des Interferenzdiagramms einer Punktquelle.

Wir betrachten nun die Amplitude, die sich bei einer kreissymmetrischen Quelle ergibt. Die Intensitätsverteilung der Quelle sei durch die Strahlungstemperatur $T(r)$ beschrieben. Wir machen die Voraussetzung, daß der Quellendurchmesser so klein ist, daß $F(\Theta)$ über die Fläche der Quelle als konstant angesehen werden kann. Dazu müssen wir annehmen, daß sich der Mittelpunkt der Quelle in der Nähe des Symmetriepunktes des Interferenzmusters befindet. Dann ergibt sich durch Integration über die Fläche der Quelle die von der Trennung n der

⁴ M. RYLE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **211**, 351 [1952].

⁵ P. A. O'BRIEN, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **113**, 597 [1953].

⁶ P. A. O'BRIEN u. E. TANDBERG-HANSSEN, The Observatory **75**, 11 [1955].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Antennen abhängige Amplitude $2 K P A(n)$, wobei

$$A(n) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} T(r) \cos(2\pi n \sin(r \cos \varphi)) r dr d\varphi \quad (3)$$

oder nach Ausführung der Integration über φ , wobei der sin durch das Argument ersetzt wird,

$$A(n) = 2\pi \int_0^{\infty} T(r) r J_0(2\pi n r) dr. \quad (4a)$$

Darin ist J_0 die BESEL-Funktion der Ordnung Null. $A(n)$ ist also die FOURIER-BESSEL-Transformierte von $T(r)$. Die Transformation kann umgekehrt werden, d. h. es gilt

$$T(r) = 2\pi \int_0^{\infty} A(n) n J_0(2\pi n r) dn. \quad (4b)$$

Da die Interferometermethode bisher hauptsächlich zur Untersuchung der Intensitätsverteilung über die Sonnenscheibe im dm- und m-Gebiet angewandt wurde, wählen wir bei der numerischen Auswertung der im folgenden betrachteten Modelle einen Radius von $16'$. Er entspricht im Bogenmaß dem Radius

$$R_{\odot} = 4,7 \cdot 10^{-3}. \quad (5)$$

Wegen der Symmetrie von n und r in den Formeln (4) und (5) lassen sich die Ergebnisse ohne weiteres auf Quellen anderer Radien übertragen.

Bei der Bestimmung von $T(r)$ aus den gemessenen Amplituden $A(n)$ im Interferenzdiagramm tritt die grundsätzliche Schwierigkeit auf, daß der Abstand n der beiden Antennen nicht beliebig groß gemacht werden kann. Die größte Trennung betrage N Wellenlängen. Es ergibt sich dann die Frage, mit welcher Genauigkeit die Verteilungsfunktion $T(r)$ der Strahlungsintensität aus der nur für $n \leq N$ bekannten Transformierten $A(n)$ ermittelt werden kann. Dieses Problem soll in der vorliegenden und einer späteren Arbeit diskutiert werden.

Der anschauliche Sinn der Formeln (1), (4a) und (4b) kann folgendermaßen beschrieben werden: Wir legen über die Intensitätsverteilung $T(r)$ abwechselnd 2 Filter der Durchlässigkeit $1 \pm \cos 2\pi n \sin \Theta$ und messen die gesamte durchgehende Intensität. Dann kann man $T(r)$ bei festgehaltenem n , d. h. bestimmtem Abstand der Durchlässigkeitsstreifen, natürlich ermitteln. Dies wird aber möglich, wenn man n und damit den Streifenabstand zwischen 0 und ∞ variiert. Bildet man die Differenz der mit den beiden

Filtern gemessenen Intensitäten, so erhält man die Meßgröße $A(n)$. Wenn sie für alle Streifenabstände bekannt ist, so zeigt die Umkehrformel (4b), daß $T(r)$ in Strenge bestimmt werden kann. Beim MICHELSON-Interferometer entspricht den Durchlässigkeitsstreifen das Interferenzmuster und n bedeutet den Antennenabstand.

Eine grobe Abschätzung der Maximalentfernung N , die zum Aufbau einer Intensitätsverteilung aus BESEL-Funktionen erforderlich ist, kann leicht aus (4b) gewonnen werden. Will man nur den Durchmesser einer radialsymmetrischen Quelle bestimmen, so muß N mindestens so groß sein, daß im Integranden eine BESEL-Funktion enthalten ist, welche für den Radius R der Quelle 0 wird. Da die erste Nullstelle von J_0 beim Argument 2,3 auftritt, muß gelten

$$2\pi N R > 2,3. \quad (6)$$

Diese Forderung bedeutet für eine Quelle vom Durchmesser D' Bogenminuten

$$N > 2500/D' \quad (6')$$

oder für die Sonne $N > 80$.

Sind feinere Strukturen darzustellen, etwa ein ringförmiges Gebiet der Breite Δr , so muß man verlangen, daß für dieses Δr beim Maximalwert N von n mindestens ein zwischen zwei benachbarten Nullstellen liegendes Maximum der Besselfunktion auftritt. Es muß also gelten

$$N > 1/2 \Delta r, \quad (7)$$

da der Abstand benachbarter Nullstellen von J_0 asymptotisch gleich π ist. Ist beispielsweise $\Delta r = 3'$, so folgt

$$N > 570. \quad (7')$$

Diese Mindestwerte der Maximalentfernung sind von gleicher Größenordnung wie die Werte von N , welche aus der geläufigen Formel für das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs vom Objektivdurchmesser D folgen. Der kleinste trennbare Winkelabstand ist bekanntlich

$$\delta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = \frac{1,22}{N},$$

$$\text{also ist } N = \frac{4200}{\delta'}.$$

Für $\delta' = 3'$ erhält man $N = 1400$. Natürlich kann das Auflösungsvermögen einer Empfangsanordnung, welche die auf eine kreisförmige Fläche vom Durchmesser D auffallende Strahlung ausnutzt, nicht von einem MICHELSON-Interferometer mit dem maximalen

Antennenabstand D Größenordnungsmäßig übertragen werden. Es ist jedoch nicht zu erwarten, daß die Formel für das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs mehr als die Größenordnung der bei gegebenem N darstellbaren Quellenstruktur liefert, da die Bedingungen, unter denen sie abgeleitet ist, von denen des MICHELSON-Interferometers verschieden sind.

Eine genaue Formulierung der Problemstellung kann folgendermaßen gegeben werden. Schneidet man die Spektralfunktion $A(n)$ bei $n=N$ ab, so entsteht ein Fehler der Intensitätsverteilung $T(r)$, der von $T(r)$ und N abhängt. Er soll im folgenden für Modelle mit Bereichen konstanter Strahlungstemperatur untersucht werden. Dabei werden scheibenförmige und ringförmige Modelle untersucht; im Hinblick auf die spätere Anwendung auf die Sonne wird außerdem eine Überlagerung von Scheibe und Ring betrachtet. Der Betrag der transformierten $A(n)$ nimmt mit wachsendem n ab. $A(n)$ läßt deshalb schon das für die Darstellung von $T(r)$ wesentliche Spektralgebiet erkennen. Setzt man $A(n)$ für $n > N$ gleich 0, so entsteht an Stelle von $T(r)$ die Intensitätsverteilung

$$T^*(r) = 2\pi \int_0^N A(n) J_0(2\pi n r) n dn. \quad (9)$$

Die Abweichung von der wahren Verteilung ist gegeben durch

$$\Delta T(r) = T(r) - T^*(r) = 2\pi \int_N^\infty A(n) J_0(2\pi n r) n dn. \quad (10)$$

II. Modelle mit Bereichen konstanter Strahlungstemperatur

1. Scheibe konstanter Strahlungstemperatur (Kastenmodell)

Das einfachste Modell ist eine Scheibe konstanter Strahlungstemperatur. Dieses Modell heiße Kastenmodell. Für $r \leq R$ sei also $T(r) = T_S$ konstant und für $r > R_S$ sei $T = 0$. Dann ergibt sich nach (4)

$$A_S(n) = T_S 2\pi \int_0^R J_0(2\pi n r) r dr = T_S 2\pi R^2 \frac{J_1(x)}{x} \quad (11)$$

mit

$$x = 2\pi n R. \quad (12)$$

Auf numerischem Wege erhält man für die Sonne ($R = R_\odot$) und $N = 120, 180$ und 240 die in Abb. 2 dargestellten Kurven für $T^*(r)$. Für größere Werte von N kann in (10) die asymptotische Formel für die BESSEL-Funktion verwendet werden. Sie lautet

$$J_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (13)$$

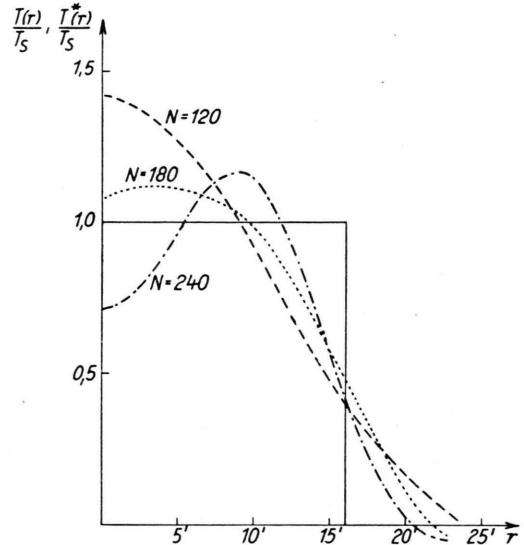


Abb. 2 und 3. Kastenmodell der Sonnenscheibe. Wahre Intensitätsverteilung $T(r)$ und verfälschte Verteilung $T^*(r)$ in Abhängigkeit von der Maximalentfernung N der Antennen.
— wahre Intensitätsverteilung.
(Abb. 3 auf S. 772.)

Führt man die Abkürzung

$$\beta = 2\pi r, \quad \alpha = 2\pi R \quad (14)$$

ein, so wird

$$\Delta T = T_S \int_N^\infty J_1(n\alpha) J_0(n\beta) \alpha dn. \quad (15)$$

Bei der Sonne ist nach (5)

$$\alpha_\odot = 2,95 \cdot 10^{-2}. \quad (14')$$

Es ergibt sich für

$\alpha - \beta > 0$ (Innengebiet):

$$\Delta T = T_S \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} [\text{Ci}(N\alpha + N\beta) - \text{si}(N\alpha - N\beta)], \quad (16 \text{ a})$$

$\alpha - \beta < 0$ (Außengebiet):

$$\Delta T = T_S \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} [\text{Ci}(N\alpha + N\beta) + \text{si}(N\beta - N\alpha)]. \quad (16 \text{ b})$$

Hierin ist wie üblich

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad (17 \text{ a})$$

$$\text{si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \text{Si}(x) - \frac{\pi}{2}. \quad (17 \text{ b})$$

$$\text{Da } -\text{si}(x) = \pi + \text{si}(-x), \quad (17 \text{ c})$$

springt ΔT am Rande der Scheibe ($r=R$) um T_S . Denselben Sprung hat die Ausgangsfunktion $T(r)$. Infolgedessen ist T^* stetig, wie zu erwarten war. Die Funktionen T^* sind für $R=R_\odot$ und die maximalen Antennenabstände $N=500$ und 1000 in Abb. 3 dargestellt. Die Berechnung von T^* für die Mitte der Scheibe ($r=0$) wird in Abschnitt II, 4 a gegeben werden.

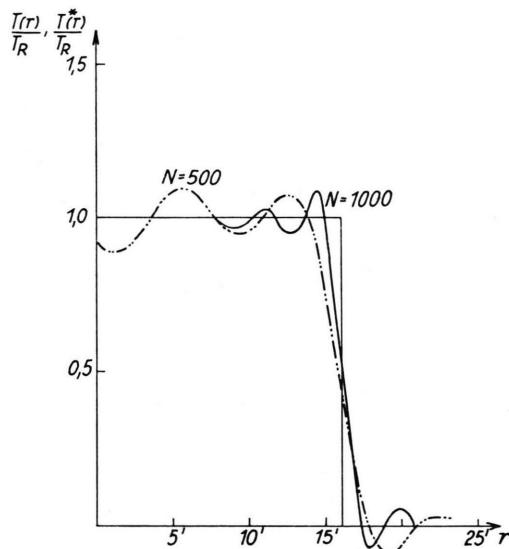


Abb. 3.

2. Ring mit konstanter Strahlungstemperatur (Kastenmodell des Ringes)

Das einfachste Ringmodell ist ein Ring konstanter Strahlungstemperatur. Dieses Modell heiße Kastenmodell des Ringes. Es sei also

$$\begin{aligned} T &= T_R \quad \text{für } r_1 \leq r \leq r_2, \\ T &= 0 \quad \text{für } 0 \leq r < r_1, \quad r_2 < r. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Spektralfunktion wird dann

$$A_R(n) = T_R \frac{1}{n} [r_2 J_1(n \alpha_2) - r_1 J_1(n \alpha_1)] \quad (19)$$

mit den Abkürzungen

$$\alpha_1 = 2 \pi r_1, \quad \alpha_2 = 2 \pi r_2. \quad (20)$$

Unter der Voraussetzung eines schmalen Ringes wird für nicht zu große Antennenabstände

$$2 \pi n(r_2 - r_1) = 2 \pi n \Delta r \ll 1 \quad (21)$$

$$A_R(n) \rightarrow T_R 2 \pi R \Delta r J_0(n \alpha_1). \quad (19')$$

Da die BESSEL-Funktionen vom Argument x asymptotisch wie $x^{-1/2}$ klein werden, nimmt $J_0(x)$ wie $x^{-1/2}$,

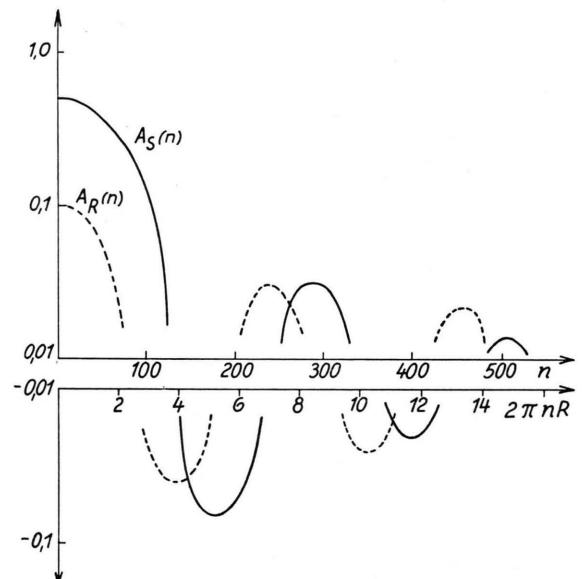


Abb. 4. Vergleich der Transformierten $A(n)$ von Scheibe und Ring. Die Ordinatenskala ist logarithmisch. Die obere Skala gilt für $R=R_\odot$.

$J_1(x)/x$ wie $x^{-3/2}$ ab. Für $r_2=R$ hat der Ring also ein breiteres Spektrum als die Scheibe, was auch von vorneherein zu erwarten war. Die Funktionen A_S und A_R sind in Abb. 4 dargestellt. Dabei ist $T_R = \frac{1}{2} T_S$, $\Delta r = \frac{1}{5} R$, $r_2 = R$ und $R = R_\odot$ gesetzt.

Die durch Begrenzung des Spektrums bei $n=N$ verfälschte Intensitätsverteilung T^* wurde nach (9) für die angegebenen Werte von r_1 , r_2 und $N=120$, 240 , 500 und 1000 berechnet. Die Ergebnisse sind aus Abb. 5 zu ersehen. Während die Kurven bis $N=240$ numerisch berechnet wurden, erfolgte die Bestimmung von T_R für größere Werte von N wieder auf analytischem Wege mit Hilfe der asymptotischen Formeln für die BESSEL-Funktion. Nach (10, 13, 19) erhält man Gl. (22):

$$\Delta T(r) = T_R \frac{2}{\pi} \int_N^{\infty} \left[\sqrt{\frac{r_2}{r}} \cos \left(n \alpha_2 - \frac{3\pi}{4} \right) - \sqrt{\frac{r_1}{r}} \cos \left(n \alpha_1 - \frac{3\pi}{4} \right) \right] \cos \left(n \beta - \frac{\pi}{4} \right) \frac{dn}{n}. \quad (22)$$

Die Berechnung des Integrales liefert

$$\Delta T(r) = T_R \frac{1}{\pi} \left\{ \sqrt{\frac{r_2}{r}} [\text{Ci}(2) - \text{si}(2)] - \sqrt{\frac{r_1}{r}} [\text{Ci}(1) - \text{si}(1)] \right\}; \quad (23)$$

hierin ist

$$\text{Ci}(k) = \text{Ci}(N \alpha_k + N \beta) \quad (k=1,2) \quad (23')$$

und $\text{si}(k)$

$$\begin{aligned} \text{im Gebiet innerhalb des Ringes} & \quad \alpha_2 - \beta > 0, \quad \alpha_1 - \beta > 0 \\ \text{im Ringgebiet} & \quad \alpha_2 - \beta > 0, \quad \alpha_1 - \beta < 0 \\ \text{im Gebiet innerhalb des Ringes} & \quad \alpha_2 - \beta < 0, \quad \alpha_1 - \beta < 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \text{si}(N \alpha_2 - N \beta) & \quad \text{si}(N \alpha_1 - N \beta) \\ \text{si}(N \beta - N \alpha_2) & \quad \text{si}(N \beta - N \alpha_1) \end{aligned} \right\} \quad (23'')$$

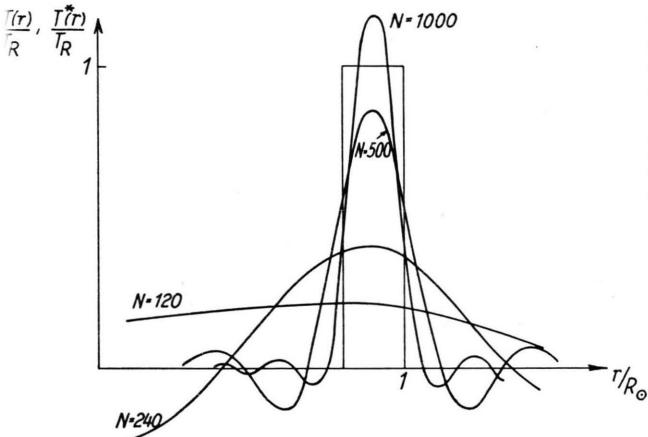


Abb. 5. Kastenmodell des Ringes. Wahre und verfälschte Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von N .

Infolge von (17c) springt ΔT beim Übergang von innen nach außen an der inneren Ringgrenze $r=r_1$ um T_R nach oben und an der äußeren Grenze $r=r_2$ wieder um T_R nach unten. Da $T(r)$ dieselben Sprünge hat, bleibt T^* stetig. Wie Abb. 5 zeigt, ist die Existenz eines Ringes der angegebenen Form erst bei $N \approx 240$ zu vermuten, aber erst bei $N \approx 1000$ stimmt die Halbwertsbreite der Näherungsfunktion mit der Breite des Ringes überein.

3. Überlagerung von Scheibe und Ring

Wir betrachten nun ein Modell, bei dem einer Scheibe vom Radius $R=R_\odot$ und der Strahlungstemperatur T_S der in Abschnitt II.2 betrachtete Ring mit $T_R = \frac{1}{2} T_S$ überlagert ist. Wie Abb. 4 zeigt, wird die Amplitude von A_S erst von $x \approx 15$ an klein gegenüber der Amplitude von A_R . Der Beitrag des

Ringes wird also erst von $n = 15/\alpha_\odot \approx 500$ an wesentlich. Bis zur ersten Nullstelle $x \approx 3,8$ von $J_1(x)$ wirkt sich die Existenz eines hellen Ringes nur unbedeutend aus. Dies kommt besonders deutlich zum Ausdruck, wenn man die Transformierten $A(n)$ der beiden Modelle Scheibe und Scheibe mit überlagertem Ring vergleicht, die in Abb. 6 dargestellt sind.

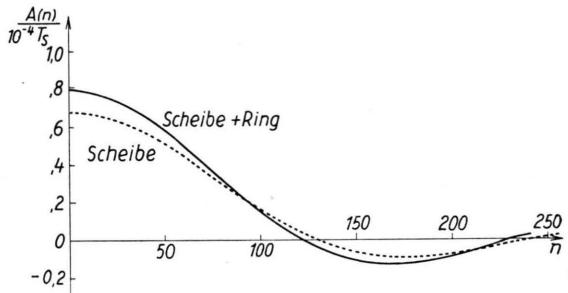


Abb. 6. Vergleich der Transformierten der Intensitätsverteilung der Scheibe und der Überlagerung von Scheibe und Ring.

Die Unterschiede bei der Beobachtung werden noch geringer, da die Temperaturen von Scheibe und Ring nicht bekannt sind und nur der relative Verlauf $A(n)/A(0)$ gemessen werden kann. Die Approximationen $T^*(r, N)$, die sich für die betrachteten Werte von N ergeben, sind in Abb. 7 zusammengestellt. Man erkennt, daß ein $N \approx 1000$ erforderlich ist, um Lage, Breite und Höhe des Ringes einigermaßen richtig wiedergeben zu können. Wie ein Vergleich mit Abb. 2 zeigt, ist bei $N \approx 240$ noch keine Aussage über die Existenz eines Ringes möglich; bei $N \approx 500$ ist das Vorhandensein eines Ringes angedeutet, aber Lage, Breite und Höhe zeigen beträchtliche Abweichungen.

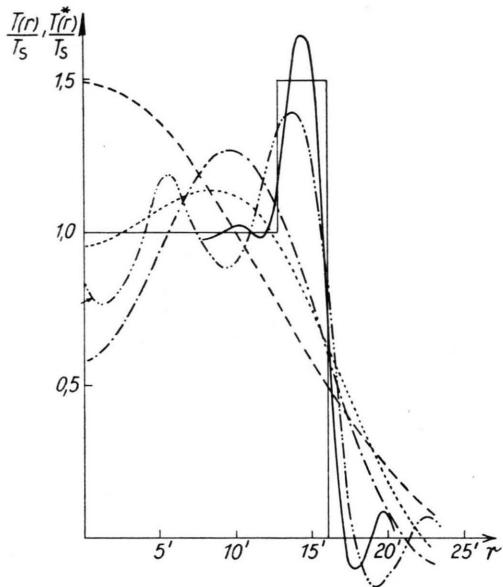


Abb. 7. Überlagerung von Scheibe und Ring. Wahre und verfälschte Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von N .
— $N=1000$; -·-·- $N=500$; -·-·- $N=240$;
··· $N=180$; -·-·- $N=120$.

4. Diskussion der Abweichung $\Delta T(r)$ an charakteristischen Stellen

Die bisherigen Kurven für $T^*(r)$ gelten für bestimmte Werte von N und ein festgehaltenes Modell von $T(r)$, bei dem außer T_S und T_R die durch r_1 und r_2 gegebene Breite des Ringes vorgegeben wurde. Es soll nun $\Delta T(r)$ für verschiedene Modelle an charakteristischen Punkten der Scheibe in Abhängigkeit von N untersucht werden.

a) Mittelpunkt

Die Formel (9) vereinfacht sich für $r=0$ auf

$$T^*(0) = 2\pi \int_0^N A(n) n dn. \quad (24)$$

Wir betrachten zunächst den

a) Beitrag der Scheibe. Mit Gl. (11) ergibt sich $T_s^*(0) = T_s[1 - J_0(X)]$ mit $X = 2\pi NR$. (25)

Dieser Zusammenhang zwischen $T_s^*(0)/T_s$ und X bzw. N ist in Abb. 8 dargestellt. Für $R=R_\odot$ erhält man bis $N \approx 190$ zu große Werte der Strahlungstemperatur, dann werden die Abweichungen bis $N \approx 300$ negativ usw. Da $J_0(x)$ wie $x^{-1/2}$ bzw. $N^{-1/2}$ abnimmt,

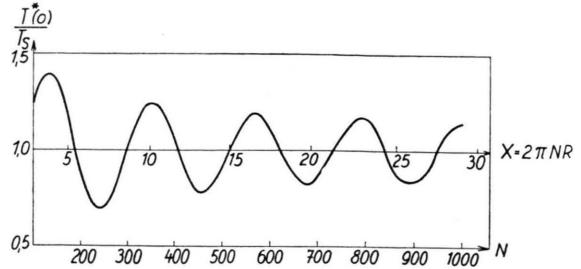


Abb. 8. Intensität im Scheibenmittelpunkt beim Kastenmodell der Scheibe in Abhängigkeit von $X=2\pi NR$ bzw. N (für $R=R_\odot$).

wird der Fehler nur sehr langsam klein. Bei $N=1000$ beträgt er noch 15%. Asymptotisch gilt nach (13)

$$|\Delta T_S| \rightarrow T_S \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{X}}. \quad (26)$$

Man kann allgemein zeigen, daß jede beliebige Intensitätsverteilung $T(r)$, die für $r>R$ den Wert 0 hat, bei kleinen Maximalentfernungen N in der Mitte zu viel Intensität liefert. Für die Mitte gilt zunächst nach (10) allgemein

$$\Delta T(0) = (2\pi)^2 \sum_{n=N}^{\infty} \int_{r=0}^{\infty} T(r) J_0(2\pi n r) r dr dn. \quad (27)$$

Vertauscht man die Integrationsfolge und führt die Integration über n aus, so ergibt sich

$$\Delta T(0) = -2\pi N \int_0^{\infty} T(r) J_1(2\pi n r) dr. \quad (28)$$

Da J_1 beim Argument 3,8 die erste Nullstelle besitzt, ist das Integral jedenfalls positiv, wenn der Integrand für $2\pi N r > 3,8$ verschwindet. Dies ist der Fall, wenn $T(r)=0$ für $r>R$ ist, wobei R durch die Gleichung $2\pi N R = 3,8$ bestimmt ist. Damit $T^*(0) - T(0) = -\Delta T(0)$ positiv wird, muß also für die maximale Antennenentfernung N gelten

$$N < 3,8/\alpha.$$

Für eine Scheibe vom Sonnenradius ergibt diese Bedingung nach (14')

$$N < 130.$$

β) Beitrag des Ringes. Die Transformierte (19) führt auf

$$T_R^*(0) = T_R[J_0(N\alpha) - J_0(N\alpha_2)]; \quad (29)$$

asymptotisch gilt

$$T_R^*(0) \rightarrow \frac{1}{\pi} T_R \left[\frac{1}{\sqrt{N} r_1} \cos \left(N \alpha_1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{N} r_2} \cos \left(N \alpha_2 - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (29')$$

Der Funktionsverlauf ist stark von den Werten abhängig, die für r_1 und r_2 angenommen werden.

Ungünstigenfalls haben beide Terme in Gl. (29') dasselbe Vorzeichen und die Beträge der cos sind 1. Dies ist der Fall, wenn $N(\alpha_2 - \alpha_1) = (2m+1)\pi$ ist (m positiv, ganz), d. h. wenn

$$\frac{\Delta r}{R} = \frac{(2m+1)\pi}{\alpha N} = \frac{2m+1}{2RN}.$$

Die minimale relative Breite, für welche dies bei der Sonne eintritt, ist also $10^2/N$. Ist andererseits $N(\alpha_2 - \alpha_1) = 2m\pi$, so wird $T_R^*(0) = 0$.

Es gilt somit folgende Abschätzung

$$|T_R^*(0)| = \frac{1}{\pi} T_R \left[\frac{1}{\sqrt{N} r_1} + \frac{1}{\sqrt{N} r_2} \right] < \frac{2}{\pi} T_R \frac{1}{\sqrt{N} r_1}. \quad (30)$$

Der helle Ring täuscht also bei endlichem N in der Mitte i. a. eine Strahlungsintensität T_R^* vor, die ebenfalls wie $N^{-1/2}$ sehr langsam abnimmt. Wenn $T_R = \frac{1}{2} T_S$ ist, erhält man bei schmalem Ring ($\Delta r/r_1 \ll 1$) im ungünstigsten Fall für die Strahlung der Scheibe und des Ringes asymptotisch etwa denselben Fehler.

b) Mitte des Ringes

Führt man in (24) die durch $r_m = (r_1 + r_2)/2$ bestimmte Mitte des Ringes ein und setzt $r_2 - r_1 = R \Delta Q$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta T_R(r_m) = \frac{1}{\pi} T_R \left\{ - \sqrt{\frac{2}{r_1 + r_2}} (\sqrt{r_2} + \sqrt{r_1}) \right. & \quad (31) \\ \cdot \sin(\pi N \Delta r) + \sqrt{\frac{2 r_2}{r_1 + r_2}} \operatorname{Ci}(\pi N(r_1 + 3r_2)) & \\ \left. - \sqrt{\frac{2 r_1}{r_1 + r_2}} \operatorname{Ci}(\pi N(r_2 + 3r_1)) \right\}. \end{aligned}$$

Wenn

$\Delta r \ll R$ und $r_2 \approx R$, ist $r_1 + 3r_2 \approx r_2 + 3r_1 \approx 4R$.

Für $R = R_\odot$ sind die Argumente der Funktionen Ci von etwa $N = 200$ an $\gg 1$; andererseits ist dann $\pi N \Delta r = \Delta Q \cdot \alpha N / 2$ nahe bei 1 (für $\Delta Q = 0,2$ wird $\pi N \Delta r$ für $N = 1000$ erst 3). Für die Ci kann somit die asymptotische Formel $\operatorname{Ci} x = \sin x/x$ verwendet werden; die beiden letzten Glieder liefern deshalb

Beiträge, die abgesehen von der nahen Umgebung der Nullstellen der Funktion si klein sind gegen den 1. Term. Infolgedessen kann man sie unter den angegebenen Bedingungen in guter Näherung vernachlässigen. Setzt man die obere Begrenzung des Ringes $r_2 = R$ und $r_1 = \varrho_1 R$, so wird die rechte Seite nur eine Funktion von ϱ_1 . Dann ergibt sich

$$\frac{\Delta T_R(r_m)}{T_R} = - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{1 + \varrho_1}} (1 + \sqrt{\varrho_1}) \operatorname{si}(\pi N R (1 - \varrho_1)). \quad (32)$$

Der Vorfaktor ist nur wenig von ϱ_1 abhängig; selbst bei $\varrho_1 = 0,5$ ist er nur um 2% kleiner als der Maximalwert für $\varrho_1 = 1$. Es gilt also in ausreichender Näherung

$$\frac{\Delta T_R(r_m)}{T_R} = - \frac{2}{\pi} \operatorname{si}(\pi N R \Delta Q). \quad (32')$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 9 dargestellt. Bei vorgeschriebenem prozentualen Fehler $\Delta T_R/T_R$ hat $N \Delta Q$ einen festen Wert. N ist also umgekehrt proportional zur Breite des Ringes Δr . Ist speziell $\Delta Q = 0,2$, so gilt die untere Abszissenskala für N . Wie zu erwarten, kommt bis zu einem ziemlich hohen Wert von N die Temperatur der Ringmitte zu klein heraus.

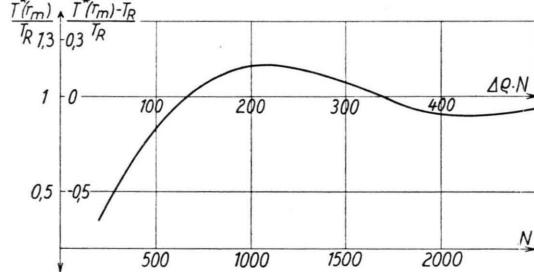


Abb. 9. Intensität in der Ringmitte in Abhängigkeit von $\Delta Q = \Delta r/R \cdot N$ bzw. N (für $\Delta Q = 0,2$) für $R = R_\odot$.

Bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Modellen wurde der Verlauf von $T(r)$ durch die Annahme von Bereichen konstanter Strahlungstemperatur, an deren Rändern $T(r)$ unstetig ist, schematisiert. Modelle mit stetiger Temperaturverteilung werden im zweiten Teil der Arbeit untersucht. In ihr sollen auch die bisherigen Bestimmungen der Intensitätsverteilung der Sonne diskutiert werden.

Herrn Dipl.-Math. U. HAUG haben wir für seine Hilfe bei der numerischen Berechnung der in Abb. 2, 4, 6 und 7 dargestellten Kurven zu danken.